შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

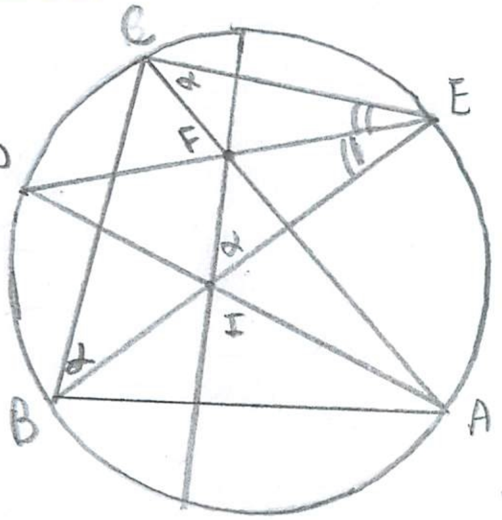
შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 2	25.04.2015/ მათ/III/ 601

ამოცანა № 1 | გვერდი № 1

ლემა №1:



თუ I △ABC-ში ჩახაზული წრეწირის ცენტრია, ხოლო DE ~~DE∩AC~~ AC-ს კვეთს F წერტილში. მაშინ FI ∥ BC.

დამტკიცება

რადგან I ჩახაზული წრეწირის ცენტრია D და E წერტილები იქნებიან შესაბამისად BC და AC რკალების შუაწერტილები. ამიტომ:

$$\angle CED = \frac{\breve{DC}}{2} = \frac{\breve{BD}}{2} = \angle FEI.$$

განვიხილოთ სამკუთხედები CFE და IFE:

$$\left.\begin{array}{l} \angle CEF = \angle FEI \\ CE = EI \\ EF \text{ - საერთო} \end{array}\right| \Rightarrow \triangle CFE = \triangle IFE$$

საიდანაც

$$\angle FIE = \angle ECF = \frac{\breve{AE}}{2} = \frac{\breve{CE}}{2} = \angle CBE \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BC \parallel FI. \text{ რ.დ.გ.}$$

შენიშვნა: ის ფაქტი, რომ $CE = EI$ დამტკიცებული მაქვს პირველი შესრულების ცდის პირველი ამოცანის ამოხსნას ამიტომ აქ ის ჩვეულებრივ სახით არის დამტკიცებული.

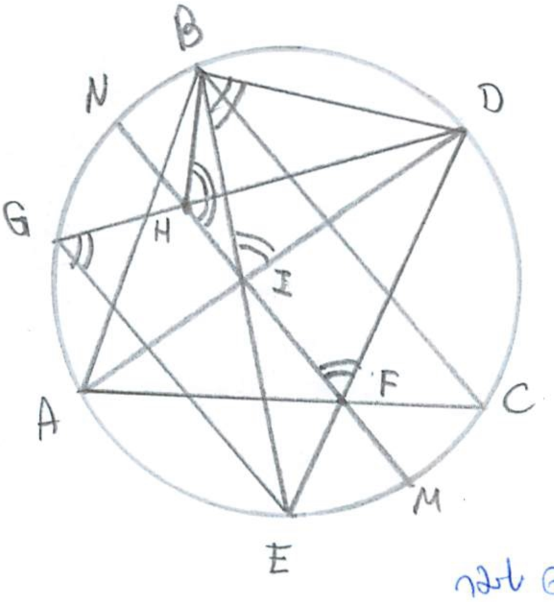
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 2	25.04.2015/ მათ/III/ 601

ამოცანა № 1	გვერდი № 2



$\angle DGE = \frac{\breve{DE}}{2} = \angle DBE$

მეორეს მხრივ, სადაც $IF \parallel EG$

$\angle DGE = \angle DHI$ საიდანაც მივიღეთ, რომ $HBDI$ ოთხკუთხედი ჩახაზულია ანუ $\angle BHD = \angle BID$

$\angle BID = \frac{\breve{BD} + \breve{AE}}{2} = \frac{\breve{DC} + \breve{EC}}{2} = \frac{\breve{DE}}{2} =$

$= \angle DGE$

ლემა №1-ის გამოყენებით $IF \parallel BC$, რაც იმას ნიშნავს, რომ $\breve{NB} = \breve{MC} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle HFD = \frac{\breve{ND} + \breve{EM}}{2} = \frac{\breve{NB} + \breve{BD} + \breve{EM}}{2} = \frac{\breve{MC} + \breve{DC} + \breve{EM}}{2} =$

$= \frac{\breve{ED}}{2} = \angle DGE = \angle BID = \angle BHD$, ანუ $\angle BHD = \angle HFD$

ვიცით, რომ BH იქნება ΔHFD-ზე შემოხაზული წრეწირის მხები მაშინ და მხოლოდ მაშინ თუ $\angle BHD = \angle HFD$ და სადაც $\angle BHD = \angle HFD$ ტოლობა ნაჩვენია ამიტომ BH არის FHD სამკუთხედის მხები—რ.დ.გ.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 2	25.04.2015/ მათ/III/ 601

ამოცანა № 2 გვერდი № 1

შევნიშნოთ, რომ თუ x რიცხვზე მოხდება პირველი ცვლის ოპერაცია ($f(x)=x+\frac{1}{2}$) მაშინ x რიცხვი იზრდება, ხოლო თუ მოხდება მეორე ცვლის ოპერაცია ($f(x)=x^2$) რადგან $x\in(0,1)$ x რიცხვი მცირდება. ამიტომ პირველი ცვლის ოპერაციას ($f(x)=x+\frac{1}{2}$) ვუწოდოთ ზრდის ოპერაცია, ხოლო მეორე ცვლისას ($f(x)=x^2$) კი შემცირების.

დავუშვათ საწინააღმდეგო და ვთქვათ, რომ არსებობს $0<a<b<1$ რიცხვები რომლისთვისაც არის არსებობს ისეთი n, რომ $(a_n-a_{n-1})(b_n-b_{n-1})$ იქნება დადებითი. მაშინ განვიხილოთ ეს a და b რიცხვები და შევნიშნოთ რამდენიმე რამე ფაქტი:

I ნებისმიერი n მეტი არანატურალური k-თვის ის ოპერაციაც სრულდება a_k-ზე იგივე b_k-ზეც. მართლაც დავუშვათ საწინააღმდეგო და ვთქვათ $a_{k+1}=a_k+\frac{1}{2}$, ხოლო $b_{k+1}=b_k^2$ მაშინ $(a_{k+1}-a_k)(b_{k+1}-b_k)<0$, რადგან $a_{k+1}>a_k$, ხოლო

$b_{k+1} < b_k$, მაგრამ ჩვენ ხომ ავიღეთ ისეთი a და b რომლისთვისაც ასეთი რამ არასოდეს ხდებოდა?! ასე რომ მივიღეთ, რომ a_k-ზე გაზრდის, ხოლო b_k-ზე კვადრატის ოპერაციის ჩატარებამ არ შეიძლება.

ანალოგიურად ვიქცევით თუ b_k-ზე ჩატარდა გაზრდის a_k-ზე კი კვადრატის ოპერაცია.

II როგორც პირველი ასევე მეორე ტიპის ოპერაცია ჩატარდება უსასრულოდ ბევრჯერ. მართლაც თუ ჩატარდა პირველი ტიპის ანუ გაზრდის ოპერაცია a_k-ზე, ~~[illegible]~~ ანუ $a_{k+1}=a_k+\frac{1}{2}$, მაშინ a_{k+1}-ზე ჩატარდება მეორე ანუ კვადრატის ოპერაცია:

$a_{k+1}=a_k+\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow a_{k+2}=(a_{k+1})^2$ და ეს იმას ნიშნავს, რომ კვადრატის ოპერაცია ჩატარდება უსასრულოდ ბევრჯერ.

ახლა დავუშვათ საწინააღმდეგო და ვთქვათ, რომ ~~[illegible]~~ არსებობს m ისეთი ინდექსი, რომ m-ური წევრის შემდეგ არცერთხელ არ ჩატარებულა პირველი გაზრდის ოპერაცია. (ანუ ბოლო ასეთი ოპერაცია იყო $a_m=a_{m-1}+\frac{1}{2}$). თუ m-ის შემდეგ ყველა კვადრატის ოპერაცია ჩატარდა, მაშინ ნებისმიერი ~~[illegible]~~ არაუარყოფითი მთელი k-თვის $a_{m+k}=\underbrace{((a_m)^2)^2\cdots)^2}_{k\text{-ჯერ}} = a_m^{2^k}$ და რადგან $a_m<1$ იარსებებს k, რომლისთვისაც

$\cancel{a_{m+k}}$ $a_m^{2^k}$

$a_{m+k} = a_m^{2^k} < \frac{1}{2}$ რაც ეწინააღმდეგება ხოლო გაზრდის ოპერაციის რაოდენობას. ე. ი. ჩვენი დაშვება მცდარია. ამიტომ რომელიც გაზრდის ასევე შემთხვევის ოპერაცია რაოდენობა ყოველთვის ლუწია.

III

თუ $y = f(x)$ მაშინ $y \geq \frac{1}{4}$ რადგან გვაქვს 2 შემთხვევა $0 < x < \frac{1}{2}$ ან $\frac{1}{2} \leq x < 1$. პირველ შემთხვევაში $y = x + \frac{1}{2} > \frac{1}{2} \geq \frac{1}{4}$

მეორე შემთხვევაში კი

$y = x^2 \geq \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

აქედან გამომდინარე $k \in N$ $a_k = f(a_{k-1})$ ამიტომ $a_k \geq \frac{1}{4}$.

ახლა განვიხილოთ სხვაობები $b_{i+1} - a_{i+1}$, თუ $a_{i+1} = a_i + \frac{1}{2}$ მაშინ $b_{i+1} - a_{i+1} = \left(b_i + \frac{1}{2}\right) - \left(a_i + \frac{1}{2}\right) = b_i - a_i$, ხოლო თუ $a_{i+1} = a_i^2$, მაშინ $\cancel{b_i^2 - a_i^2}$

$b_{i+1} - a_{i+1} = b_i^2 - a_i^2 = (b_i - a_i)(b_i + a_i)$ ამ შემთხვევაში აქედან $a_{i+1} = a_i^2$ ნიშნავს, რომ $a_i \geq \frac{1}{2}$ (ანალოგიურად $b_i \geq \frac{1}{2}$). ანუ $a_i + b_i \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \geq 1$ ანუ თუ განვიხილავთ

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 2

25.04.2015/ მათ/III/ 601

ამოცანა № 2

გვერდი № 4

$c_i = b_i - a_i$ მიმდევრობა ზრდადია, რომ რადგან $b_0 > a_0$

$0 < c_0 \le c_1 \le c_2 \le \dots \le c_k \le \dots$

ახლა ამოვწეროთ ყველა ის სპეციალური ინდექსები

$r_1, r_2, \dots, r_m, \dots$

რომლებისთვისაც მოხდა პირველი ოპერაცია, ანუ

$a_{r_1+1} = a_{r_1} + \frac{1}{2}$ ასეთი ინდექსები (II)-დან გამომდინარე

იქნება უსასრულოდ ბევრი. თუ ავალაგებთ ზრდადობით, რომ

ზედიზედ ორი ან მეტი პირველი ოპერაციის შემდეგ არ შეიძლება

ანუ $r_1 < r_2 < \dots < r_m < \dots$

რადგან r_i სპეციალურია (III)-დან გამომდინარე

$a_{r_i} \ge \frac{1}{4}$ ($b_{r_i} \ge \frac{1}{4}$). $a_{r_i+1} = a_{r_i} + \frac{1}{2} \ge \frac{3}{4}$ (ანალ. $b_{r_i+1} \ge \frac{3}{4}$)

ამიტომ $c_{r_i+2} = c_{r_i+1} \cdot (a_{r_i+1} + b_{r_i+1}) \ge c_{r_i+1} \cdot \frac{3}{2}$

(ეს იმიტომ, რომ r_i+1-ე ოპერაცია იქნება მეორე).

ეს იმას ნიშნავს, რომ c_n მიმდევრობა უსასრულოდ ბევრჯერ გაიზრდება $\frac{3}{2}$-ჯერ, ანუ ნებისმიერი t და s-ათვის არსებობს ($t, s \ge 0$) ისეთი k ისეთი, რომ

$c_t \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^s < c_k$

6

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 2

25.04.2015/ მათ/III/ 601

ამოცანა № 2

გვერდი № 5

და იმის მიხედვით, რომ სადაც $c_0>0$ აისახება n ისეთი, რომ $c_n \geq 1$ ასევე $c_n = b_n - a_n$ $(b_n, a_n > 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow b_n > 1$ და ეს შეუძლებელია ანუ ჩვენი დაშვებული დაშვება ~~[illegible]~~ არასწორია ანუ ნებისმიერი $0<a<b<1$ -თვის არსებობს მთელი დადებითი n ისეთი, რომ

$$(a_n - a_{n-1})(b_n - b_{n-1}) < 0$$ — რ.დ.გ.

7

$7x^2-13xy+7y^2=(|x-y|+1)^3$

შევნიშნოთ, რომ თუ ამონახსნია (x,y) მაშინ ამონახსნი იქნება (y,x) ამიტომ ზოგადობის შეუზღუდავად ვთქვათ $x \geq y$.

$7x^2-13xy+7y^2=(x-y+1)^3$.

$7(x-y)^2+xy=(x-y)^3+3(x-y)^2+3(x-y)+1$.

$4(x-y)^2-(x-y)^3-3(x-y)=1-xy$.

$(x-y)(4x-4y-(x-y)^2-3)=1-xy$.

საიდან ვღებულობთ, რომ $1-xy \,\vdots\, x-y$.

$(x-y)(4x-4y-x^2+2xy-y^2-3)$

8